

La relativité générale et la spirale infernale des étoiles binaires compactes

[article paru dans “Images de la Physique 2005”, édité par É. Falgarone *et al.*, Éditions du C.N.R.S., p. 51 (2005)]

Luc Blanchet

GRεCO, Institut d’Astrophysique de Paris, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France
(Dated: July 27, 2005)

La théorie relativiste de la gravitation, très bien vérifiée par les tests classiques dans le système solaire et par le rayonnement gravitationnel du pulsar binaire, est un des outils fondamentaux de l’astrophysique. Elle permet le calcul de la forme de l’onde gravitationnelle émise lors de la phase spirale des binaires d’étoiles à neutrons et de trous noirs. À partir d’une approximation dite post newtonienne développée à un ordre élevé, la prédiction de cette théorie est utilisée comme “patron d’onde” pour la recherche et l’analyse du signal dans le réseau de détecteurs d’ondes gravitationnelles VIRGO/LIGO.

La relativité générale est quelquefois considérée comme la plus importante création intellectuelle jamais réalisée par un seul homme : Albert Einstein. Elle a révolutionné notre vision de la nature de l’espace et du temps, et de notre perception familière de la force de la gravitation. Les physiciens “relativistes” admirent l’extraordinaire cohérence mathématique – et donc la beauté – de ses équations. La relativité générale est maintenant une vieille dame, qui est née en 1915 après des années de gestation laborieuse remontant à la découverte de la relativité restreinte en 1905, l’année miraculeuse d’Einstein dont nous fêtons le centenaire. Nous allons voir que cette vieille dame est très en forme, car plus que jamais la relativité générale est considérée comme *la* théorie de la gravitation.

Le phénomène familier de la gravitation possède en relativité générale l’interprétation extraordinaire d’être la manifestation de la courbure de l’espace et du temps produite par la présence des corps massifs. Cette description est une conséquence d’un principe fondamental, appelé de nos jours le principe d’équivalence d’Einstein, qui est la traduction en physique moderne du fait que tous les corps sont accélérés de la même façon dans un champ gravitationnel. On dit parfois que la masse inerte m_i des corps, qui n’est rien d’autre que leur énergie $E = m_i c^2$ en utilisant l’équivalence masse-énergie de la relativité restreinte, est toujours égale à leur masse gravitationnelle m_g , qui est l’analogie de la charge électrique pour le champ gravitationnel. C’est bien sûr Galilée qui a fait remarquer l’importance de cette “universalité” du mouvement de chute libre des corps (bien que son expérience fameuse du haut de la tour de Pise soit probablement apocryphe), mais c’est Einstein qui a donné à ce fait expérimental son statut définitif.

LE TRIPTYQUE DES TESTS CLASSIQUES DANS LE SYSTÈME SOLAIRE

Dès 1845, Le Verrier à l’observatoire de Paris (un an avant sa découverte de Neptune par le calcul à partir des

perturbations engendrées sur Uranus), avait remarqué que le demi grand-axe de l’orbite de Mercure précesse à chaque rotation avec un angle qui est légèrement en avance par rapport à la prédiction théorique Δ_N . Son calcul de Δ_N , en théorie de Newton, était fondé sur les perturbations induites par les autres planètes, principalement Vénus qui est la plus proche de Mercure, et Jupiter qui est la plus massive du système solaire. L’avance anormale du périhélie était restée inexplicée et avait alimenté de nombreuses spéculations, parmi lesquelles l’existence d’une nouvelle planète intérieure à l’orbite de Mercure (dénommée Vulcain par Le Verrier), la présence possible d’un anneau de matière zodiacale dans le plan de l’écliptique, et même une modification de la loi newtonienne en $1/r^2$. Dès l’obtention des équations du champ gravitationnel en novembre 1915, Einstein prouva que les corrections purement relativistes au mouvement d’une planète sur une ellipse keplerienne impliquent une rotation supplémentaire du grand axe de l’ellipse donnée par

$$\Delta_R = \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 a(1 - e^2)},$$

où a et e sont le demi grand-axe et l’excentricité de l’orbite, M_\odot est la masse du Soleil, et G et c sont la constante de la gravitation et la vitesse de la lumière. Numériquement on trouve 43” d’arc par siècle, qui s’ajoutent donc à la précession newtonienne Δ_N pour être en parfait accord avec l’observation ! C’est certainement ce succès remarquable qui a convaincu Einstein de la justesse de la théorie naissante (c’était d’ailleurs à l’époque la seule confrontation possible de la théorie à des observations réelles).

Le deuxième “test classique”, encore plus célèbre, est celui de l’angle de déviation de la lumière en provenance d’une source lointaine (un quasar dans les mesures récentes), par le champ de gravitation du Soleil. Il est donné en relativité générale, dans le cas d’un rayon rasant la surface du Soleil (rayon R_\odot), par

$$\alpha_\odot = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}.$$

arXiv:gr-qc/0507111 v1 26 Jul 2005

Cet angle vaut *deux* fois la valeur estimée en théorie de Newton, car en effet si on considère la lumière comme faite de corpuscules de vitesse c (et de masse arbitraire, car la masse n'intervient pas), il y a bien une déviation de la lumière chez Newton ! En fait on peut montrer que le facteur 4 dans l'expression de α_{\odot} se décompose en "2+2", avec le premier 2 qui provient du principe d'équivalence, $m_i = m_g$, qui est vrai en relativité générale comme en théorie de Newton, et le second 2 qui est un effet supplémentaire dû à la courbure de l'espace en relativité générale. L'angle α_{\odot} vaut 1.75" d'arc, et fut mesuré lors d'une éclipse du Soleil par Eddington en 1919, qui put d'ores et déjà conclure que la théorie de Newton était exclue expérimentalement. (En cette année du traité de Versailles un anglais mettait à mal la théorie d'un autre anglais, et confirmait expérimentalement celle d'un allemand.)

L'effet Shapiro complète notre triptyque des tests classiques de la relativité générale dans le système solaire. C'est un retard dû au champ de gravitation dans les temps d'arrivée de photons ayant rasé la surface du Soleil. Non seulement la trajectoire de la lumière est déviée de l'angle α_{\odot} , mais les photons sur leur trajectoire sont *ralentis* par le champ du Soleil. L'effet n'est pas du tout négligeable, et il a été calculé et observé pour la première fois par Shapiro en 1964. Son expérience a consisté à mesurer le temps d'aller-retour de photons radio émis sur Terre vers Mercure, réfléchis sur le sol de Mercure et renvoyés vers la Terre, lorsque la trajectoire des photons passe à proximité de la surface du Soleil. L'effet principal du ralentissement de la lumière est donné par

$$\Delta T = \frac{4GM_{\odot}}{c^3} \log \left(\frac{4r_{\oplus} r_{\otimes}}{R_{\odot}^2} \right),$$

où r_{\oplus} et r_{\otimes} sont les distances de la Terre et de Mercure au Soleil. Contrairement aux autres tests, l'effet Shapiro ne date pas de l'enfance de la relativité générale. Curieusement, Einstein n'a jamais pensé à calculer cet effet. Ayant obtenu la trajectoire des photons au voisinage du Soleil et leur angle de déviation α_{\odot} , il n'a apparemment jamais cherché à connaître le mouvement "horaire" des photons sur leur trajectoire, ce qui lui aurait donné leur retard gravitationnel ΔT – un nouvel effet tout à fait intéressant.

La relativité générale est maintenant vérifiée dans le système solaire à mieux que 1/1000^{ème} près. Des mesures très précises d'astrométrie, telles que celles du futur satellite GAIA qui sera lancé par l'agence spatiale européenne, devraient encore améliorer la précision sur la déviation de la lumière. Des théories alternatives de la gravitation, comme par exemple la théorie de Brans et Dicke où l'on rajoute un champ scalaire au champ gravitationnel de la relativité générale, et qui fut une théorie fameuse en son temps (1961), ont été éliminées par ces observations. Cependant, dans le système solaire, les vitesses des corps sont très petites par rapport à la vitesse de la

lumière, $v \lesssim 10^{-4} c$, et le champ de gravitation est faible, car le potentiel newtonien U est tout petit en unités relativistes, $U \lesssim 10^{-6} c^2$. Les tests classiques n'ont donc vérifié qu'un régime assez restreint de la théorie, celui de sa limite "quasi-newtonienne".

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE, UN OUTIL POUR L'ASTROPHYSIQUE

Après son enfance brillante, la vieille dame a connu une adolescence difficile. Elle fut longtemps considérée comme un "paradis pour le théoricien", mais un "désert pour l'expérimentateur". En fait, elle est restée à l'écart du courant principal de la physique, dominé par la mécanique quantique et la théorie quantique des champs, jusqu'au début des années 1960 (notre théorie est alors quadrangulaire), époque à laquelle elle a subi un renouveau et un essor remarquables.

Du point de vue théorique, cette époque a vu l'élucidation du concept de trou noir, et la magnifique découverte par Kerr du trou noir en rotation (1963). Le trou noir de Schwarzschild, sans rotation, date des premiers mois de la relativité générale, mais à l'époque on considérait cette solution comme valable uniquement à l'extérieur d'une étoile, et ce n'est que dans les années 60 que l'on analysera les propriétés du trou noir au voisinage de l'horizon, pour comprendre que ces objets peuvent réellement exister dans la nature. De même pour le rayonnement gravitationnel, dont on a vraiment compris les caractéristiques pendant cette période; auparavant une controverse faisait rage sur l'existence réelle des ondes gravitationnelles !

On peut dire que les expériences modernes de gravitation ont commencé avec la vérification précise en laboratoire du décalage gravitationnel vers le rouge ou effet Einstein, par Pound et Rebka en 1960. Souvent considérée comme le 4^{ème} test classique de la théorie, cette vérification est en fait un test du principe d'équivalence qui est donc plus général. À la même époque on tentait la détection du rayonnement gravitationnel à l'aide d'un cylindre métallique résonnant appelé maintenant barre de Weber.

La relativité générale émerge alors enfin en tant que théorie *physique*, qui fait des prédictions et voit ses prédictions réalisées. La découverte en 1974 du pulsar binaire PSR 1513+16, et la preuve expérimentale de l'existence du rayonnement gravitationnel tel qu'il est prévu par la relativité générale, illustre merveilleusement la capacité de prédiction de notre théorie (voir la section suivante).

Aujourd'hui la relativité générale est un "outil" permettant d'explorer l'existence et de comprendre les observations de nouveaux objets ou de nouveaux phénomènes en astrophysique. Par exemple les propriétés particulières du trou noir de Kerr sont utilisées par les as-

trophysiciens travaillant sur les objets compacts et les disques d'accrétion autour de trous noirs. La relativité générale va probablement permettre d'ouvrir une nouvelle "fenêtre" en astronomie, celle des ondes gravitationnelles, car ce rayonnement a des propriétés spécifiques très différentes des ondes électromagnétiques.

Il faut pourtant garder à l'esprit que le domaine où s'exerce la relativité générale est le *macrocosme*. Cette théorie n'incorpore pas les lois de la mécanique quantique, et il est probable qu'elle doit être considérée comme une théorie "effective" valable uniquement à grande échelle. Assez étrangement, la force gravitationnelle n'a pu être testée en laboratoire que jusqu'à une échelle de l'ordre du millimètre. À une échelle microscopique, inférieure ou très inférieure au millimètre, on ne connaît expérimentalement rien de la loi gravitationnelle et il est vraisemblable que la relativité générale *stricto sensu* ne s'applique plus.

LE PULSAR BINAIRE PSR 1913+16

L'année 1974 fut faste pour les "relativistes" avec la découverte par Hulse et Taylor d'un système extrêmement intéressant : le pulsar binaire PSR 1913+16, qui valut à ses découvreurs le prix Nobel en 1993. C'est un pulsar, c'est-à-dire une étoile à neutrons en rotation rapide sur elle-même (avec une période de 56 ms), qui envoie à chaque rotation, tel un phare, du rayonnement électromagnétique radio en direction de la Terre. L'analyse des instants d'arrivée des pulses radio montre (grâce à leur décalage Doppler) que PSR 1913+16 est en orbite autour d'une étoile compagne, probablement une autre étoile à neutrons. L'orbite est une ellipse quasi-keplerienne de période orbitale $P \simeq 7^{\text{h}}40^{\text{mn}}$, d'excentricité $e \simeq 0.617$ et de demi grand-axe $a \simeq 10^6$ km. Les masses du pulsar et de son compagne (m_p et m_c) sont toutes deux environ égales à $1.4 M_{\odot}$ (qui est la masse des étoiles à neutrons). PSR 1913+16 est un système passionnant car les effets relativistes jouent un rôle important dans sa dynamique. Par exemple, la précession relativiste Δ_R du périastre de l'orbite est de l'ordre de 4 degrés par an, à comparer avec les 43" arc par siècle du périhélie de Mercure.

Le système double formé par le pulsar et son compagne émet du rayonnement gravitationnel, ce qui se traduit par une perte d'énergie orbitale, et donc par le rapprochement des deux étoiles l'une de l'autre, et une lente dérive de la période orbitale du mouvement ($\dot{P} < 0$). On sait qu'en première approximation le rayonnement gravitationnel est quadrupolaire et le flux du rayonnement est donné par la formule dite du quadrupole d'Einstein. Si l'on applique cette formule à un système de deux masses ponctuelles en mouvement sur une ellipse keplerienne on trouve un résultat dû à Peters et Mathews

(1963),

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{5/3} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}.$$

Dans le cas du pulsar binaire cette formule donne $\dot{P} = -2.4 \cdot 10^{-12}$ s/s, qui représente donc la décroissance de la période orbitale mesurée en secondes à chaque seconde. Cette prédiction purement théorique est en excellent accord (à mieux que 0.5% près) avec les observations effectuées par Taylor et ses collaborateurs. C'est une vérification remarquable, l'une des confirmations les plus importantes de la relativité générale, et l'une des mesures les plus précises effectuées en astronomie. Mais pour nous elle représente une validation observationnelle de l'ordre newtonien sur lequel est fondé nos investigations post newtoniennes pour les binaires compactes spirales (voir la dernière section) !

LA DÉTECTION INTERFÉROMÉTRIQUE DU RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL

Une onde gravitationnelle est engendrée par le mouvement accéléré des corps massifs. Dans notre théorie, le champ de gravitation est représenté par la métrique de l'espace-temps, et l'on peut montrer que les composantes de la métrique obéissent en première approximation, dans un système de coordonnées particulier, à une équation de d'Alembert ou équation des ondes. On a donc affaire à une onde gravitationnelle, qui doit être vue comme une perturbation de la surface de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière. L'action de l'onde gravitationnelle sur la matière se traduit par des déformations analogues à celles produites par un champ de marée. La variation relative de la taille L d'un détecteur au passage de l'onde est donnée par

$$\frac{\delta L}{L} \simeq \frac{h}{2},$$

où h représente l'amplitude de l'onde gravitationnelle, c'est-à-dire la modification de la métrique de l'espace-temps par rapport à la métrique "plate" de Minkowski en l'absence du champ gravitationnel.

De nouvelles expériences vont tenter pour la première fois de détecter le rayonnement gravitationnel produit par des sources cosmiques. Ces expériences sont fondées sur l'interférométrie à laser, et sont constituées de gigantesques interféromètres de Michelson avec cavités Fabry-Perot. Elles ambitionnent de former un réseau international, comprenant des interféromètres de grande taille, LIGO aux États-Unis dont les bras ont une longueur de 4 km, et VIRGO qui est construit près de Pise avec des bras de 3 km dans le cadre d'une collaboration franco-italienne (voir la figure 1). Le réseau comprend aussi des détecteurs de taille plus modeste, GEO à Hanovre et TAMA au Japon.



FIG. 1: Vue du détecteur d’ondes gravitationnelles VIRGO à Cascina, près de Pise.

Le grand intérêt de l’interférométrie à laser pour la détection des ondes gravitationnelles, est la bande de fréquence très large du détecteur, typiquement de $\sim 10\text{ Hz}$ à 1000 Hz pour VIRGO. Les barres de Weber en revanche ne peuvent détecter qu’au voisinage de la fréquence de résonance de la barre.

L’amplitude attendue pour une onde gravitationnelle en provenance de systèmes binaires à une distance de 100 Mpc est $h \sim 10^{-23}$, ce qui, d’après l’estimation précédente sur la variation de longueur du détecteur, donne $\delta L \sim 10^{-20}\text{ m}$ dans le cas de VIRGO soit 10^{-5} fermi ! Comment est-il possible de mesurer un tel déplacement ? La réponse est qu’en réalité on mesure le déplacement *collectif* de N atomes des miroirs en entrée et en bout de bras de l’interféromètre. La mesure contient donc un effet de moyenne sur les atomes ce qui permet de gagner un facteur \sqrt{N} . Avec $N \sim 10^{18}$ ce qui correspond à une couche atomique en surface du miroir on constate que la mesure effective à réaliser est beaucoup plus raisonnable, $\delta L_{\text{eff}} = \sqrt{N} \delta L \sim 10^{-11}\text{ m}$.

Il existe de nombreuses sources astrophysiques potentielles dont le rayonnement gravitationnel pourrait être détecté par VIRGO et LIGO. Les supernovæ, qui sont des explosions d’étoiles massives en fin de vie lorsqu’elles ont épuisé tout leur “combustible” nucléaire, ont longtemps été considérées comme des sources d’ondes gravitationnelles intéressantes, mais on sait maintenant qu’elles engendrent en fait peu de rayonnement. En effet l’effondrement des couches internes de la supernova, qui devrait être responsable de la production du rayonnement gravitationnel, est essentiellement sphérique, et d’après un théorème fameux de relativité générale, le champ extérieur à une distribution sphérique de matière est donné par la solution de Schwarzschild qui est *statique* – il n’y a donc pas de rayonnement émis. Beaucoup plus intéressants pour VIRGO et LIGO sont les systèmes binaires, car leur dynamique est fortement asymétrique et ils engendrent beaucoup de rayonnement gravitationnel.

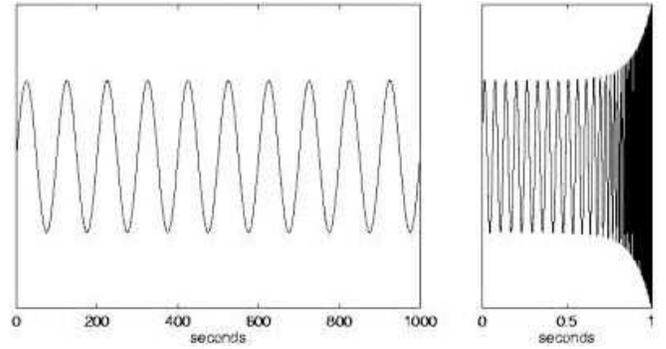


FIG. 2: Onde gravitationnelle $h(t)$ émise par une binaire compacte spirante. La fréquence et l’amplitude de l’onde augmentent adiabatiquement au cours du temps.

SPIRALE ET MORT DES SYSTÈMES BINAIRES D’ÉTOILES COMPACTES

Une binaire compacte spirante est ce que deviendra le pulsar binaire PSR 1913+16 dans quelques centaines de millions d’années, lorsqu’il finira par fusionner avec son compagnon. Pendant toute sa vie il aura émis son énergie de liaison gravitationnelle sous forme de rayonnement gravitationnel, jusqu’à ce que les deux étoiles à neutrons tombent l’une sur l’autre. (Rappelons qu’une étoile à neutrons est un astre compact, formé essentiellement de neutrons avec une densité comparable à celle de la matière nucléaire, et dont la taille est à peu près celle de l’agglomération parisienne pour une masse de $\sim 1.4 M_{\odot}$.)

Dans les derniers instants avant la fusion finale, les deux objets compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs) décrivent une orbite rapprochée qui a la forme d’une spirale circulaire rentrante à cause de la perte d’énergie liée à l’émission du rayonnement gravitationnel. C’est ce rayonnement que l’on observera sur Terre où il déformera l’espace-temps avec une amplitude relative de l’ordre de 10^{-23} (voir la figure 2). Au cours de la phase spirante, la distance entre les deux étoiles diminue au cours du temps, et la fréquence orbitale du mouvement, $\omega = 2\pi/P$ où P est la période, augmente. On peut montrer que l’évolution de l’orbite est adiabatique, dans le sens où le changement relatif de fréquence pendant une période correspondante reste faible, $\dot{\omega}/\omega^2 \lesssim 0.1$. Nous allons voir comment cette propriété d’adiabaticité permet de définir un schéma d’approximation très puissant en relativité générale, capable de décrire la spirale avec grande précision.

À la fin de la phase spirante, le système binaire atteint ce qu’on appelle la dernière orbite circulaire (dite aussi “innermost circular orbit” ou ICO), à partir de laquelle l’évolution de l’orbite cesse d’être adiabatique. Les deux corps plongent alors l’un sur l’autre et fusionnent très rapidement pour former un trou noir unique. À

cause de la dynamique violente qui conduit à la formation de ce trou noir, celui-ci est initialement très déformé et soumis à d'importantes vibrations, mais il finira par atteindre, avec l'émission de ses modes de vibration intrinsèques en ondes gravitationnelles, un régime stationnaire décrit par la solution de Kerr pour le trou noir en rotation.

Les binaires compactes spiralantes sont des systèmes parmi les plus relativistes que l'on puisse imaginer, à la fois du point de vue de la relativité restreinte, car la vitesse orbitale atteint $\sim 0.5c$ au moment du passage à la dernière orbite circulaire, et de la relativité générale, car les masses en jeu sont importantes, $1.4 M_{\odot}$ pour les étoiles à neutrons et peut-être jusqu'à $20 M_{\odot}$ pour des trous noirs, donc les champs gravitationnels sont intenses. Des milliers de cycles orbitaux sont parcourus en quelques secondes avant la fusion finale, dans ce qu'on peut décrire de façon imagée comme une "spirale infernale", constituant les derniers spasmes de l'agonie du système binaire. La spirale et la mort des binaires compactes représente donc un événement tout à fait impressionnant du point de vue de l'astrophysique. C'est principalement pendant la phase spiralee précédant immédiatement la fusion que l'onde gravitationnelle qui sera détectée par VIRGO et LIGO est produite.

De tels événements cataclysmiques de fusion d'objets compacts se produisent dans l'univers. À partir des systèmes binaires d'étoiles à neutrons connus dans notre Galaxie (le pulsar binaire PSR 1913+16 en est l'exemple le plus célèbre), on peut en déduire que quelques fusions d'étoiles à neutrons devraient survenir par an dans un volume de environ 100 Mpc de rayon centré sur notre Galaxie. Un tel volume contient des milliers de galaxies, dont toutes celles de l'amas de la Vierge (qui a donné son nom à VIRGO) situé au centre du super-amas de galaxies dans lequel nous vivons. À cette distance le signal gravitationnel sera assez puissant pour être observé par le réseau actuel des détecteurs ou par une génération de détecteurs de sensibilité améliorée. Il rentrera dans leur bande de fréquence quelques minutes avant la fusion, lorsque la fréquence du signal gravitationnel atteindra $f \sim 10$ Hz (d'après les propriétés des ondes gravitationnelles la fréquence de l'harmonique principale du signal est double de la fréquence orbitale du mouvement, $f = \omega/\pi = 2/P$). VIRGO, qui a de très bonnes performances à basse fréquence grâce à ses tours d'isolation du bruit sismique terrestre, pourra notamment capter très tôt le signal des binaires spiralantes d'étoiles à neutrons, et augmenter ainsi le rapport signal-sur-bruit par une longue intégration du signal à partir de la basse fréquence.

L'existence des binaires spiralantes de trous noirs est plus incertaine, car malheureusement on ne connaît pas de systèmes de deux trous noirs dans notre Galaxie. Néanmoins, grâce à la simulation numérique des phases successives d'évolution des systèmes binaires, on peut es-

timer que le taux de fusion de deux trous noirs pourrait être comparable ou supérieur à celui des étoiles à neutrons. Les astrophysiciens pensent souvent que la première détection du rayonnement gravitationnel par VIRGO et LIGO sera celle d'une binaire spiralante de trous noirs.

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Pour le théoricien "relativiste" l'intérêt principal des binaires compactes spiralantes réside dans le fait que l'onde gravitationnelle qu'elles émettent est *calculable* avec grande précision, indépendamment des détails de la structure interne des étoiles compactes, et de la présence possible d'un environnement astrophysique "sale". Par exemple les effets non gravitationnels, qui compliquent habituellement l'astrophysique des systèmes binaires (champs magnétiques, présence d'un milieu interstellaire, *etc.*), sont négligeables. La dynamique des binaires spiralantes est dominée par les effets gravitationnels orbitaux (les effets de marées jouent très peu de rôle dans le cas de corps compacts). On peut donc modéliser le système par deux particules ponctuelles, sans structure interne, caractérisées uniquement par leurs masses m_1 et m_2 , et aussi éventuellement par leurs spins.

Ainsi le problème théorique des binaires spiralantes est un pur problème de mécanique céleste : le problème des deux corps (considérés comme ponctuels) en relativité générale. On sait qu'en théorie de Newton le problème des 2 corps est "intégrable", mais qu'à partir de 3 corps les équations du mouvement ne peuvent pas être résolues dans le cas général. En relativité générale même pour 2 corps on ne peut pas écrire de façon exacte les équations du mouvement et encore moins les résoudre ! Le problème à un corps en revanche admet une solution exacte qui est donnée par la métrique du trou noir de Schwarzschild.

N'admettant pas de solution exacte le problème relativiste des deux corps doit être traité par des méthodes d'approximations. Ce n'est pas un drame car pratiquement tous les grands succès de la relativité générale dans sa confrontation avec l'expérience et l'observation ont été obtenus grâce à de telles méthodes.

Notre schéma d'approximation fait intervenir ce que nous avons dit à propos du spiralement adiabatique des binaires compactes. Il se trouve en effet que le petit paramètre adiabatique est en fait petit dans le sens *post newtonien*, car on a $\dot{\omega}/\omega^2 = \mathcal{O}[(v/c)^5]$, où v est la vitesse orbitale des corps et c la vitesse de la lumière. L'approximation post newtonienne consiste à développer la relativité générale autour de la théorie de Newton, sous la forme d'un développement en puissances de v/c lorsque $v/c \rightarrow 0$, ce qui peut être vu plus formellement comme un développement quand $c \rightarrow +\infty$. L'ordre

d'approximation $(v/c)^5$ correspond au premier effet de ce qu'on appelle la *réaction de rayonnement*, c'est-à-dire l'influence de l'émission du rayonnement gravitationnel sur le mouvement du système binaire, qui se traduit par un petit effet de "freinage" des corps sur leur orbite, et donc par une décroissance de la période orbitale P .

L'approximation post newtonienne est la seule technique connue qui permet de décrire la phase spirale de des binaires compactes (pendant laquelle on a $v/c \lesssim 0.5$), et elle est valable jusqu'à la dernière orbite circulaire. Passée cette orbite le développement post newtonien devrait en principe être remplacé par un calcul d'intégration *numérique* des équations d'Einstein. Un tel calcul est indispensable pour décrire en détail le mécanisme de fusion des deux horizons des trous noirs, et obtenir la forme d'onde gravitationnelle produite lors de cette phase. Malheureusement la relativité numérique n'a pas encore réussi à résoudre ce problème extrêmement difficile, bien qu'il ait été l'objet de ce qu'on a appelé le "binary black hole Grand challenge", qui a mobilisé de nombreux instituts américains mais n'a pas apporté les résultats escomptés. Il se trouve que vouloir calculer numériquement la fusion de deux trous noirs en utilisant la "force brute" d'un ordinateur n'est pas réalisable actuellement, malgré certaines percées remarquables ces dernières années. Heureusement, dans le cas d'étoiles à neutrons ou de trous noirs peu massifs, la plus grande partie du rapport signal-sur-bruit dans VIRGO et LIGO proviendra de la phase spirale précédant la fusion, qui est très bien décrite par la théorie post newtonienne.

PATRONS D'ONDES GRAVITATIONNELLES POUR VIRGO ET LIGO

Le développement post newtonien va s'avérer l'outil idéal pour le calcul de la radiation gravitationnelle d'une binaire compacte spirale. Et comme l'approximation post newtonienne va devoir être développée jusqu'à un ordre très élevé ce problème va devenir un vrai paradis pour le théoricien ! Des études d'analyse du signal dans les détecteurs VIRGO et LIGO ont en effet montré qu'une prédiction très précise de la relativité générale est nécessaire pour tirer parti de toute l'information potentielle contenue dans le signal des binaires spirales. Pour détecter le signal gravitationnel (et l'analyser ultérieurement) on utilise la prédiction théorique, que l'on appelle pour l'occasion le "patron" d'onde gravitationnelle, et on effectue sa corrélation avec le signal de sortie du détecteur. Si le patron est une copie fidèle du signal réel (c'est-à-dire si la prédiction de la relativité générale est correcte), alors la corrélation est importante, et l'on aura détecté une onde gravitationnelle.

Il a été montré que les patrons d'ondes doivent prendre en compte toutes les corrections relativistes dans

le champ d'ondes gravitationnelles jusqu'à la troisième approximation post newtonienne, qui correspond à une précision relative incluant tous les termes jusqu'à l'ordre $(v/c)^6$ par rapport à la formule du quadrupole d'Einstein pour le rayonnement gravitationnel. Dans le jargon cette approximation s'appelle 3PN, et plus généralement les termes post newtoniens $\sim (v/c)^{2n}$ sont dits d'ordre n PN.

Pour mieux comprendre ce que signifie la précision 3PN, rappelons-nous que la formule du quadrupole d'Einstein décrit l'émission des ondes gravitationnelles à l'ordre dominant (quadrupolaire en relativité générale), qui est newtonien dans le sens où à cet ordre d'approximation le quadrupole peut être calculé avec la loi newtonienne de la gravitation. C'est la formule "newtonienne" du quadrupole qui permet d'expliquer le phénomène de réaction de rayonnement dans le pulsar binaire PSR 1913+16, dont on a déjà vu qu'il correspond lui-même à une correction dans l'équation du mouvement à l'ordre $(v/c)^5$ soit 2.5PN. La précision demandée pour les binaires spirales correspond donc en fait à une contribution d'ordre 3PN+2.5PN c'est-à-dire $\sim (v/c)^{11}$ dans les équations du mouvement de la binaire !

C'est la première fois dans l'histoire de la relativité générale que la réalisation d'expériences nouvelles suscite des développements théoriques nouveaux. Même pendant la période de son renouveau, notre vieille dame, confrontée à des observations et des tests jamais effectués auparavant, s'était dédaigneusement contentée de voir ses prédictions déjà "sur étagère" confirmées. Avant le démarrage de la construction de LIGO et VIRGO on pensait que les corrections relativistes à la formule du quadrupole d'Einstein n'avaient qu'un intérêt purement académique (par exemple ces corrections sont complètement négligeables dans le cas du pulsar binaire). La prédiction théorique adéquate pour les binaires spirales n'existait pas, et il a fallu la développer spécialement dans le but de fournir les patrons d'ondes nécessaires à l'analyse du signal dans LIGO/VIRGO. Nous avons employé des méthodes perturbatives analytiques, permettant d'itérer les équations d'Einstein sous la forme d'une série post newtonienne, d'abord pour des systèmes isolés généraux, puis dans l'application à des systèmes binaires compacts. La prédiction théorique de la relativité générale, à la précision 3PN et même à 3.5PN, est maintenant sur étagère (voir la section suivante). La vieille dame est heureuse.

Un aspect intéressant de l'analyse du signal dans VIRGO et LIGO, qui résulte directement de l'application du développement post newtonien, est la possibilité d'effectuer des tests nouveaux de la relativité générale. Dans les patrons d'ondes des binaires compacts spirales, développés à 3.5PN, existent en effet plusieurs signatures caractéristiques de ce qu'on appelle les "silages" (ou "tails") d'ondes gravitationnelles, produits par la diffusion du rayonnement gravitationnel se propageant dans un espace-temps distordu par la présence de la

source elle-même. Cet effet purement non-linéaire dans la propagation du rayonnement gravitationnel de sa source vers le détecteur pourra être observé pour la première fois par comparaison des patrons d’ondes avec le signal réel dans VIRGO/LIGO. On ne connaît pas d’autres systèmes que la spirale des binaires compactes, pour lesquels la détection d’un effet aussi fin que le sillage d’onde gravitationnelle soit possible.

LA FASCINANTE APPROXIMATION 3PN

Lors du calcul des patrons d’ondes de binaires compactes spiralantes, l’approximation 3PN, *i.e.* à l’ordre $\sim (v/c)^6$ au-delà de la formule du quadrupole, s’est avérée “fascinante” par la complexité des calculs en jeu et la richesse de la théorie à cet ordre. En effet à l’ordre 3PN interviennent à la fois les corrections relativistes dans les équations du mouvement et les moments multipolaires de la source, et des effets non-linéaires associés aux sillages d’ondes gravitationnelles – une partie de l’onde se propage à une vitesse inférieure à c (en moyenne) à cause des diffusions sur la courbure de l’espace-temps induite par la source. La difficulté technique principale est de mettre correctement en œuvre le concept de masse ponctuelle modélisant les corps compacts. On a recours à des méthodes de régularisation du champ propre de particules ponctuelles.

Le patron d’onde gravitationnelle fournit essentiellement l’évolution temporelle de la phase orbitale ϕ de la binaire, par effet de réaction de rayonnement. La phase est écrite sous la forme d’une série post newtonienne, $\phi = \phi_N [1 + \sum_n a_{(nPN)} x^n]$, où le paramètre post newtonien $x \equiv (Gm\omega/c^3)^{2/3}$ est fonction de la masse totale $m = m_1 + m_2$ et de la fréquence orbitale $\omega = \dot{\phi}$. L’approximation newtonienne ϕ_N correspond au \dot{P} du pulsar binaire, à ceci près que pour les binaires spiralantes l’excentricité de l’orbite est négligeable ($e \simeq 0$). Tous les coefficients post newtoniens jusqu’à l’ordre 3.5PN inclus sont maintenant connus. À titre d’exemple, le coefficient à 3PN, qui a été le plus difficile à calculer, est donné en fonction du rapport de masse $\nu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$ par l’expression impressionnante

$$a_{(3PN)} = \frac{12348611926451}{18776862720} - \frac{856}{21} \log(16x) - \frac{160}{3} \pi^2 - \frac{1712}{21} C + \left(-\frac{15737765635}{12192768} + \frac{2255}{48} \pi^2 \right) \nu + \frac{76055}{6912} \nu^2 - \frac{127825}{5184} \nu^3.$$

Toutes les fractions rationnelles qui apparaissent dans cette formule, de même que les nombres irrationnels π et la constante d’Euler $C = \lim_{K \rightarrow \infty} [\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} - \log K]$

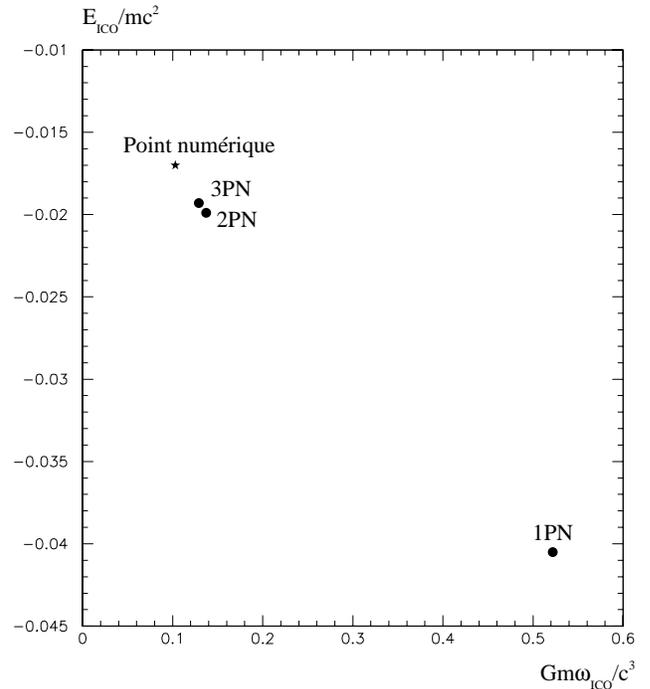


FIG. 3: Énergie d’un système binaire de masses égales à la dernière orbite circulaire (ICO) en fonction de la fréquence orbitale. On montre les approximations post newtoniennes et le point calculé par la relativité numérique.

(numériquement $C \simeq 0.577$), sont déduites de la relativité générale et de sa structure non-linéaire. Les expressions comme celles de $a_{(3PN)}$ sont utilisées pour calculer la corrélation entre le patron d’onde des binaires spiralantes et le signal de sortie des détecteurs LIGO et VIRGO.

Bien sûr il faudrait (idéalement) s’assurer que l’approximation 3PN est proche de la valeur “exacte”. Cela ne peut pas se *prouver*, mais néanmoins on peut avoir une idée de la “convergence” de la série post newtonienne en étudiant le cas de l’énergie du système binaire au passage à la dernière orbite circulaire dite ICO. La figure qui suit montre que les ordres post newtoniens successifs semblent en effet converger vers une valeur “exacte”. En effet 3PN est très proche de 2PN; par contre 1PN est clairement insuffisant car l’ICO est une orbite très relativiste ($v/c \sim 0.5$). De plus, la figure montre un très bon accord entre 3PN et la valeur calculée par la relativité numérique dans le cadre d’un modèle approché dit de “symétrie hélicoïdale” (Gourgoulhon, Grandclément et Bonazzola, 2001).

En outre, on peut faire une estimation de la précision du patron d’onde en comptant le nombre de cycles orbitaux, dans la bande de fréquence de VIRGO, dû à chacun des ordres post newtoniens. On trouve qu’à l’approximation 3.5PN l’erreur relative sur le nombre de cycles dans le cas de deux étoiles à neutrons est (proba-

blement) inférieure à un $1/10\,000^{\text{ème}}$.

Acknowledgements L’auteur remercie Thibault Damour, Gilles Esposito-Farèse, Guillaume Faye, Éricourgoulhon et Bala Iyer pour les nombreuses interactions et/ou collaborations.

-
- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & sons (1972).
- [2] C.M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press (1981).
- [3] T. Damour, *An Introduction to the Theory of Gravitational Radiation*, in “Gravitation in Astrophysics”, edited by B. Carter and J. Hartle, Plenum Press (1986).
- [4] K.S. Thorne, *Gravitational Radiation*, in “300 Years of Gravitation”, edited by S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1987).
- [5] T. Damour, *The Problem of Motion in Newtonian and Einsteinian Gravity*, in “300 Years of Gravitation”, edited by S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (1987).
- [6] L. Blanchet, *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, Living Review in Relativity **5**, 3 (2002).
- [7] L. Blanchet, G. Faye, B.R. Iyer, B. Joguet, *Gravitational-Wave Inspiral of Compact Binary Systems to $7/2$ Post-Newtonian Order*, Physical Review D **65**, 061501(R) (2002).
- [8] L. Blanchet, T. Damour, G. Esposito-Farèse, B.R. Iyer, *Gravitational Radiation from Inspiralling Compact Binaries completed at the Third Post-Newtonian Order*, Physical Review Letters **93**, 091101 (2004).